Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Integrationstheorie**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (2) *Beispiele Riemannintegrierbarer Funktionen*
Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemannintegrierbar auf ihrem Definitionsbereich sind und ermitteln Sie das Riemannssche Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ auf diesem Bereich.

i) $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ vermöge $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0,2]\backslash\{1\} \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$

ii) $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ vermöge $f(x) = x$

iii) $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ vermöge $f(x) = x^2$

iv) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vermöge $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [a,b] \\ 0, & \text{falls } x \notin [a,b] \end{cases}$ $\quad a \leq b \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 2 (2) *Beispiel für eine nicht Riemannintegrierbare Funktion I*
Begründen Sie, dass die Dirichletsche Sprungfunktion

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

nicht Riemannintegrierbar auf $[0,1]$ ist, indem Sie geeigente Riemannsche Zwischensummen auswerten.

Aufgabe 3 (2) *Beispiel für eine nicht Riemannintegrierbare Funktion II*
Skizzieren Sie die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{falls } x \in (0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0\,, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

und begründen Sie, dass sie nicht Riemannintegrierbar auf $[0,1]$ ist, indem Sie geeigente Riemannsche Zwischensummen auswerten.

Aufgabe 4 (1) *Elementargeometrische Bestimmung von Integralen*
Wir betrachten die Integrale

i) $\int\limits_{-2}^{1} 2\,dx$ $\qquad$ iii) $\int\limits_{-1}^{1} |x|\,dx$ $\qquad$ v) $\int\limits_{-3}^{3} x^3 \cos x\,dx$

ii) $\int\limits_{-1}^{1} x^3\,dx$ $\qquad$ iv) $\int\limits_{0}^{2} 2x+3\,dx$ $\qquad$ vi) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$

Deuten Sie diese als Flächeninhalte und bestimmen Sie so ohne Anwendung bekannter Integrationsregeln ihren Wert. Beachten Sie dabei z.B. Symmetrieeigenschaften der Integranden.

Aufgabe 5 (2) *Grundintegrale*
Verifizieren Sie unter Benutzung des Fundamentalsatzes der Infinitesimalrechnung

i) $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ und $x > 0$,

ii) $\int e^x \, dx = e^x + C$,

iii) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad$ mit $a > 0, a \neq 1$,

iv) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ mit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

v) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

vi) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

vii) $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$

viii) $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$

Aufgabe 6 (1) *Berechnen bestimmter Integrale I*
Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

i) $\int\limits_{-1}^{3} x \, dx$

ii) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{2x}$

iii) $\int\limits_{0}^{3} \frac{3e^x}{2} \, dx$

iv) $\int\limits_{0}^{2} (x^3 + 2x) \, dx$

v) $\int\limits_{0}^{\pi} \cos x \, dx$

vi) $\int\limits_{1}^{2} 2^x \, dx$

vii) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x}x \, dx$

viii) $\int\limits_{-2}^{2} \sin x \, dx$

Aufgabe 7 (2) *Berechnen bestimmter Integrale II*
Berechnen Sie die Integrale

a) $\int_0^2 (x - \sqrt{x}) \, dx$,

b) $\int_{\frac{1}{2}}^2 (x + \frac{1}{x}) \, dx$,

c) $\int_{-2}^2 (3x^2 - 2x^3) \, dx$,

d) $\int_{-\pi}^0 (x + \sin x) \, dx$,

e) $\int_0^2 2^x \, dx$,

f) $\int_1^2 e^{x-1} \, dx$,

g) $\int_0^2 \frac{1}{x+2} \, dx$,

h) $\int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$,

i) $\int_1^2 \frac{3}{x^2} \, dx$,

j) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \, dx$,

k) $\int_{-1}^0 \frac{1}{3x-1} \, dx$,

l) $\int_1^2 \frac{2}{x\sqrt{x}} \, dx$,

m) $\int (4x^3 - 2x^2 + x + 1) \, dx$,

n) $\int (3 - 2x^3) \, dx$,

o) $\int (\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}) \, dx$,

p) $\int \sin 3x \, dx$,

q) $\int \sin^2 x \, dx$,

r) $\int \cos^2 \frac{x}{2} \, dx$.

Aufgabe 8 (2) Berechnen Sie die Fläche zwischen

a) $y = x^2$ und $y = 1 - x^2$,

b) $y = \sqrt{x}$ und $y = x^3$,

c) $y = e^x$, $x = 0$ und $y = e$.

Aufgabe 9 (2) *Partielle Integration I*
Berechnen Sie mit partieller Integration

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} x\cos x \; dx \quad (f = x; \quad dg = \cos x \; dx)$,

b) $\displaystyle\int_{1}^{e} x\ln x \; dx \quad (f = \ln x; \quad dg = x \; dx)$,

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{3x} \; dx \quad (f = x; \quad dg = e^{3x} \; dx)$,

d) $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln x \; dx \quad (f = \ln x; \quad dg = dx)$.

Aufgabe 10 (2) *Partielle Integration II*
Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe von partieller Integration

i) $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^x \; dx$

ii) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2e^x \; dx$

iii) $\displaystyle\int_{1}^{2} \ln x \; dx$

iv) $\displaystyle\int_{1}^{2} x^2\ln x \; dx$

v) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\sin x \; dx$

vi) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^x\sin x \; dx$

Aufgabe 11 (2) *Anwendung der Substitutionsregel*
Berechnen Sie die folgenden Integrale unter Benutzung der Substitutionsregel:

i) $\displaystyle\int_{0}^{1} (1-3x)^3 \; dx$

ii) $\displaystyle\int_{0}^{1} 3x^2e^{x^3} \; dx$

iii) $\displaystyle\int_{0}^{1} e^x\sin e^x \; dx$

iv) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(5x+1) \; dx$

v) $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{e^x}e^x \; dx$

vi) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} \; dx$

vii) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\cot x^2 \; dx$

viii) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}} \; dx$

ix) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

x) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

Aufgabe 12 (2) Berechnen Sie mit Substitutionsregel

a) $\displaystyle\int_0^1 (1+x)^9 \, dx,$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (2+3x)^5 \, dx,$

c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx,$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{2x+1} \, dx,$

e) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2} \, dx,$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx,$

g) $\displaystyle\int_0^\pi \cos\frac{x}{3} \, dx,$

h) $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos x^3 \, dx,$

i) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx,$

j) $\displaystyle\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin(\sin x) \, dx,$

k) $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{x+1} \, dx, \quad (u = \sqrt{x+1}),$

l) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x+2\sqrt{x}} \, dx \quad (u = \sqrt{x}),$

m) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)(2x+x^2)^3 \, dx \quad (u = x+1),$

n) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^2} \, dx.$

Aufgabe 13 (3) Berechnen Sie (irgendwie)

a) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{4-x^2} \, dx,$

b) $\displaystyle\int_1^e \ln 2x \, dx,$

c) $\displaystyle\int_1^e \sqrt{x}\ln x \, dx,$

d) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos x \, dx,$

e) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x \, dx,$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) \cdot e^{-\sin 2x} \, dx.$

Aufgabe 14 (3) *Substitution und partielle Integration*
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

i) $\displaystyle\int xe^{-x^2} \, dx$

ii) $\displaystyle\int \sin^2 x \, dx$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, beweise man nun die folgenden Rekursionsformeln

iii) $\displaystyle 2\int x^n e^{-x^2} \, dx = -x^{n-1}e^{-x^2} + (n-1)\int x^{n-2}e^{-x^2} \, dx$

iv) $\displaystyle\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} \cdot \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \, dx$

Aufgabe 15 (2) *Partialbruchzerlegung*
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

i) $\displaystyle\int \frac{7x+1}{x^2+x-6} \, dx$

ii) $\displaystyle\int \frac{-x^2+5x-2}{x^3-x} \, dx$

iii) $\displaystyle\int \frac{1-x}{(x+5)^2} \, dx.$

Aufgabe 16 (4) *Riemann-Darbouxintegrierbarkeit einer Lipschitzstetigen Komposition*
Auf dem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}, a < b$, seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-Darbouxintegrierbar und beschränkt, d.h. mit einer Konstante $M \in (0, \infty)$ gilt

$$|f(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq M \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Ferner sei $H : [-M, M] \times [-M, M] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine bezüglich beider Argumente *Lipschitzstetige* Funktion, d.h. mit einer reelen Zahl $L > 0$ gilt

$$\left|H(s, t) - H(s', t')\right| \leq L \left|s - s'\right| + L \left|t - t'\right| \quad \text{für alle } s, s', t, t' \in [-M, M].$$

Beweisen Sie, dass dann die Komposition

$$h(x) := H(f(x), g(x)), \quad x \in [a, b],$$

ebenfalls Riemann-Darbouxintegrierbar auf [a,b] ist.

Aufgabe 17 (3) *Vererbung von Integrierbarkeit*
Beweisen Sie mithilfe der Aussage der vorherigen Aufgabe:
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres, kompaktes Intervall und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Funktionen $H : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzstetig bez. beider Argumente. Geben Sie insbesondere die Lipschitzkonstanten $L > 0$ an.

- $H(s,t) := s + t$,
- $H(s,t) := st$,
- $H(s,t) := \lambda s$,
- $H(s,t) := |s|$.

Es seien jetzt $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei auf dem kompakten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}, a < b$, Riemannintegrierbare Funktionen, und es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass dann auch Riemanintegrierbar auf $[a,b]$ sind:

i) $h(x) := f(x) + g(x)$

ii) $h(x) := \lambda g(x)$

iii) $h(x) := f(x)g(x)$

iv) $h(x) := |f(x)|$